

Практика 5. Как определяется показатель Ляпунова и что он характеризует?

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Как определяется показатель Ляпунова и что он характеризует?

Динамическая система(ДС) – любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния, как совокупности некоторых величин в некоторый момент времени, и задан закон, описывающий эволюцию начального состояния с течение времени.

Математическая модель ДС: введены параметры (координаты), характеризующие в каком-то приближении состояние системы, и указан оператор ϕ_t , позволяющий установить изменение координат во времени.

Аттрактор – притягивающее множество.

Странный аттрактор – сложные притягивающие множества в фазовом пространстве размерности $N > 2$, допускающие возможность хаотического поведения ДС.

Экспоненциальное разбегание фазовых траекторий

Рассмотрим две фазовые точки, расстояние между которыми $\Delta(0)$ в начальный момент времени мало. В момент времени t оно равно $\Delta(t)$, причем $\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \sim e^{ht}$, где h – некоторое число, характеризующее скорость разбегания траекторий.

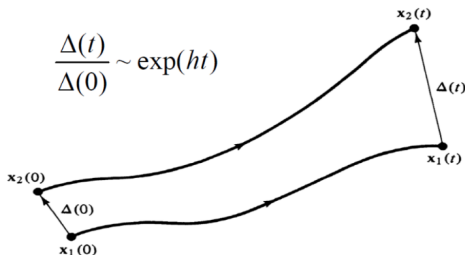


Рис. 1. Фазовые траектории.

В ограниченном фазовом объеме экспоненциальное разбегание приводит к «запутыванию траекторий».

Показатель Ляпунова

Количественной мерой, характеризующей странный аттракторы, является число Ляпунова (характеристика экспоненциального разбегания)

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta(t)}{\Delta(0)}.$$

Например в трехмерном пространстве существует 4 типа аттракторов, которые определяются показателями Ляпунова $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$:

- ❶ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, -)$ – устойчивая неподвижная точка;
- ❷ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, -, -)$ – устойчивый предельный цикл;
- ❸ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$ – устойчивый двумерный тор;
- ❹ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, -)$ – странный аттрактор.

Рассмотрим линейное ОДУ:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x$$

Его решение x с начальным условием $x(0) = x_0$ будет иметь вид:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$$

Если теперь рассмотреть решение $\tilde{x}$ с возмущенным начальным условием $\tilde{x}(0) = x_0 + \delta x_0$, оно будет иметь вид:

$$\tilde{x}(t) = (x_0 + \delta x_0) e^{\lambda t}$$

Для разности этих решений $\delta x = \tilde{x} - x$ будет выполняться

$$\frac{d}{dt} \delta x = \lambda \cdot \delta x, \quad \delta x(0) = \delta x_0, \quad \delta x(t) = \delta x_0 e^{\lambda t}$$

При этом величина λ называется **показателем Ляпунова** и при $\lambda > 0$ характеризует скорость расхождения близких траекторий; за время $t = 1/\lambda$ расхождение траекторий увеличивается в e раз, это время называется **временем Ляпунова** (также удобно использовать время $t = \ln 2 / \lambda$, за которое расхождение увеличивается в 2 раза); при $\lambda < 0$, соответственно, траектории сходятся друг к другу.

λ может быть выражена через решения следующим образом:

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{\delta x(t)}{\delta x(0)}$$

при этом в линейном случае результат не зависит от δx_0 и t и точки x_0 , окрестность которой рассматривается.

В общем случае нас интересует поведение траекторий на достаточно большом времени при достаточно малых отклонений от заданной точки x_0 , поэтому для некоторого семейства отображений $x(t) = F(t, x_0)$ (которое может, например, отвечать решению какого-то ОДУ с начальным условием x_0) показатель Ляпунова можно определить следующим образом:

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left| \frac{F(t, x_0 + \delta x) - F(t, x_0)}{\delta x} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\partial}{\partial x} F(t, x_0) \right|$$

В частности, если задано нелинейное ОДУ с гладкой функцией f

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

и рассматривается окрестность стационарной точки $x_0 : f(x_0) = 0$:

$$\frac{d}{dt} \delta x = f(x_0 + \delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \delta x + O(\delta x^2)$$

тогда при фиксированном t и достаточно малом начальном отклонении δx_0 выполняется

$$\delta x(t) \approx \delta x_0 \cdot e^{\lambda t}, \quad \lambda = f'(x_0)$$

Рассмотрим теперь семейство отображений $\bar{x}(t) = F(t, \bar{x}_0)$ при $\bar{x} \in \mathcal{R}^n$ (например, соответствующее решение системы ОДУ) – в таком случае $\frac{\partial}{\partial \bar{x}} F(t, \bar{x}_0)$ представляет собой линейный оператор (т.е. производная понимается в смысле Фреше), и есть смысл рассматривать его спектр – собственные значения, или, в более общем случае, сингулярные числа $\{\sigma_i(t)\}$. Спектр Ляпунова можно определить как $\{\lambda_i - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_i(t)\}$, показателем расхождения будет наибольшее число в спектре.

В случае систему ОДУ по спектру в окрестности стационарной точки можно судить о ее устойчивости (все числа отрицательные) или неустойчивости (все числа положительные).